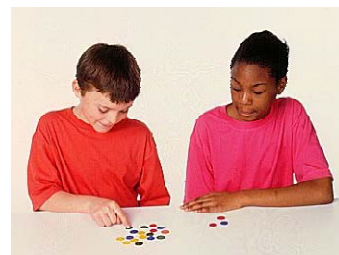


## HRÁME SA NIM

Existuje veľa hier, ku ktorým nepotrebuje zložité hracie plány. Jedna z nich sa volá NIM. Má takéto pravidlá:

*Hrajú dvaja hráči. Na začiatku hry je na kope 16 fazuliek. Hráči striedavo odoberajú z kopy fazuľky. Hráč, ktorý je na ťahu, musí z kopy odobrať 1, 2 alebo 3 fazuľky. Vyhráva hráč, ktorý zoberie poslednú fazuľku.*



NIM si zahrali Pavla a Karol. Ich hra mala tento priebeh:

1. ťah: Začal Karol, zobral 2 fazuľky, ostalo ich 14. Pavla zobrala 3, ostalo ich 11.
2. ťah: Karol zobral 1, ostalo ich 10. Pavla zobrala 3, ostalo ich 7.
3. ťah: Karol zobral 2, ostalo ich 5. Pavla zobrala 1, ostali 4.
4. ťah: Karol zobral 1, ostali 3. Pavla zobrala 3 a vyhrala.

**Úloha 1:** V štvrtom ťahu zobral Karol 1 fazuľku. Mohol hrať Karol v tomto ťahu lepšie, teda tak, aby vyhral? Zakrúžkujte správnu z dvojice možností *áno* – *nie* a svoju odpoveď vysvetlite.

Odpoveď:  áno  nie

Vysvetlenie:


**Úloha 2:** V treťom ťahu zobral Karol 2 fazuľky. Mohol hrať Karol v tomto ťahu lepšie – teda tak, aby napokon vyhral? Zakrúžkujte správnu z dvojice možností *áno* – *nie* a svoju odpoveď vysvetlite.

Odpoveď:  áno  nie

Vysvetlenie:


Nasledujúca hra Pavly a Karola mala takýto priebeh:

1. ťah: Začal Karol, zobral 2 fazuľky, ostalo ich 14. Pavla zobrala 3, ostalo ich 11.
2. ťah: Karol zobral 1, ostalo ich 10. Pavla zobrala 3, ostalo ich 7.
3. ťah: Karol zobral 3, ostali 4. Pavla zobrala 1, ostali 3.
4. ťah: Karol zobral 3 a vyhral.

**Úloha 3:** Mohla v 2. ťahu hrať Pavla inak – tak, aby jej to zaručilo víťazstvo, nech by hral Karol akokoľvek? Zakrúžkujte správnu z dvojice možností *áno* – *nie* a svoju odpoveď vysvetlite.

Odpoveď:  áno  nie



Vysvetlenie:

Opísaná hra NIM je svojím spôsobom nespravodlivá. Existuje totiž postup, ktorý jednému z hráčov zaručí víťazstvo, nech jeho súper hrá akokoľvek (tento postup budeme nazývať *vyhrávajúca stratégia*). V nasledujúcej úlohe nás bude zaujímať, ktorý z dvojice hráčov je takto zvýhodnený: začínajúci (teda ten, ktorý ťahá ako prvý) alebo druhý.

**Úloha 4:** Zistite, pre ktorého z dvojice hráčov existuje vyhrávajúca stratégia. Opíšte túto stratégiu.

Odpoveď: Vyhrávajúca stratégia existuje pre ..... hráča.

Opis:

Ak obidvaja hráči vedia o existencii vyhrávajúcej stratégie, hra prestáva byť zaujímavá. Vtedy má zmysel trochu zmeniť jej pravidlá. V nasledujúcich úlohách uvedieme niekoľko možných obmien hry NIM. V každej z týchto obmien nás bude zaujímať, ako je to s vyhrávajúcou stratégiou.

V prvej obmene zmeníme počet fazuliek, s ktorými hru začíname. Nové pravidlá budú:

*Hrajú dvaja hráči. Na začiatku hry je na kope 22 fazuliek. Hráči striedavo odoberajú fazuľky. Hráč, ktorý je na ťahu, musí z kopy odobrať 1, 2 alebo 3 fazuľky. Vyhráva hráč, ktorý zoberie poslednú fazuľku.*

**Úloha 5:** Určte, pre ktorého hráča existuje teraz vyhrávajúca stratégia a opíšte ju.

Odpoveď: Pre ..... hráča.

Opis:



V ďalšej obmene zmeníme počet fazuliek, ktoré sú v hre na začiatku, aj počet fazuliek, ktoré odoberajú hráči počas hry. Pravidlá tejto obmeny sú takéto:

*Hrajú dvaja hráči. Na začiatku hry je na kope 26 fazuliek. Hráči striedavo odoberajú z kopy fazulky. Hráč, ktorý je na ľahu, musí z kopy odobrať 1, 2, 3 alebo 4 fazulky. Vyhráva hráč, ktorý zoberie poslednú fazulku.*

**Úloha 6:** Určte, pre ktorého hráča existuje vyhrávajúca stratégia a opíšte ju.

Odpoveď: Pre ..... hráča.

Opis:

V nasledujúcej obmene sme zmenili nielen počet fazuliek na začiatku, ale aj pravidlo určujúce, kto vyhráva.

*Hrajú dvaja hráči. Na začiatku hry je na kope 21 fazuliek. Hráči striedavo odoberajú z kopy fazulky. Hráč, ktorý je na ľahu, musí z kopy odobrať 1, 2 alebo 3 fazulky. Prehráva hráč, ktorý zoberie poslednú fazulku.*

**Úloha 7:** Určte, pre ktorého hráča existuje vyhrávajúca stratégia a opíšte ju.

Odpoveď: Pre ..... hráča.

Opis:

Tu sú pravidlá poslednej z našich obmien hry NIM:

*Hrajú dvaja hráči. Hru začínajú s číslom 0. Obaja striedavo pričítajú číslo 1, 2 alebo 3. Kto prvý dosiahne súčet 30, vyhráva.*

Pre lepšie pochopenie uvádzame priebeh jednej hry (tučným je vyznačené číslo, ktoré pričítal druhý hráč):

$$0 + 2 + \mathbf{3} + 2 + 2 + 1 + \mathbf{3} + 3 + 2 + 1 + \mathbf{3} + 1 + \mathbf{3} + 1 + 3.$$

Súčty boli postupne

$$2, 5, 7, 9, 10, 13, 16, 18, 19, 22, 23, 26, 27, 30.$$

Vyhral teda druhý hráč.

**Úloha 8:** Určte, pre ktorého hráča existuje vyhrávajúca stratégia a opíšte ju.

Odpoveď: Pre ..... hráča.

Opis: